

Ensayos

Análisis Bayesiano del Modelo Poisson

Resumen

En este artículo se hace un análisis bayesiano del modelo Poisson. Se aplica este modelo a accidentes aéreos fatales de los países miembros de la Organización de Aviación Civil Internacional. Se utilizan algunas de las técnicas de integración Monte Carlo para aproximar algunos valores de interés, tal como el valor esperado, la varianza, etc. Se hace un análisis de los métodos de muestreo por importancia y muestreo de aceptación-rechazo. También se analiza el método de Metropolis-Hastings el cual, es uno de los métodos de simulación Monte Carlo vía cadenas de Markov, para aproximar la distribuciones a posteriori. Este método es de los de mayor resonancia en la actividad estadística, así como en diversas áreas del conocimiento.

Abstract

The present study offers a Bayesian analysis of the Poisson model. This model is applied to fatal air accidents in member countries of the International Civil Aviation Organization. Some of the Monte Carlo integration techniques are used to approximate some values of interest, such as expected value, variance, etc. An analysis is done of sampling methods in terms of their importance, and of acceptance/rejection sampling. The Metropolis-Hastings method, which is one of the Monte Carlo simulation methods, is also analyzed through Markov chains, in order to approximate a posteriori distributions. This method is of the greatest resonance in statistical activity, as well as in a range of fields of knowledge.

Résumé

Dans cet article, on propose une analyse bayésienne du modèle Poisson. On applique ce modèle à des accidents aériens fatals des pays membres de l'Organisation d'Aviation Civile Internationale. On utilise quelques techniques d'intégration Monte Carlo pour approcher des valeurs d'intérêts comme la valeur attendue, la variante, etc. On analyse les méthodes d'une part d'échantillonnage par ordre d'importance et d'autre part de démonstration d'acceptation-refus. On analyse également la méthode de Metropolis-Hastings, l'une des méthodes de simulation Monte Carlo effectuée au travers des chaînes de Markov, afin d'approcher la distribution a posteriori. Cette méthode est reconnue au sein de l'activité statistique tout comme dans divers domaines de connaissance.

* Alamilla-López, N.E.

* Jiménez Hernández, J.
del C.

Palabras clave: Teorema de Bayes, accidentes aéreos, distribución de Poisson, Monte Carlo, cadenas de Markov.

1. Introducción

El objetivo de este artículo es el de analizar algunos métodos de integración Monte Carlo y algunos métodos de simulación Monte Carlo vía cadenas de Markov, aplicados al modelo Poisson, desde el enfoque bayesiano.

Los métodos de integración y simulación Monte Carlo surgen porque, cuando se realiza el cálculo de la distribución a posteriori muchas veces éste resulta muy costoso, ya que regularmente esta distribución no tiene una forma cerrada. El costo se centra en el cálculo de ciertas integrales que no pueden resolverse analíticamente y por lo tanto se necesita contar con métodos eficientes que permitan resolver integrales en varias dimensiones. Entonces, gracias al avance computacional se pueden utilizar diversos algoritmos estadísticos para aproximar las integrales

* Profesor Investigador,
Universidad Tecnológica de la
Mixteca, Instituto de Física y
Matemáticas

que surgen del análisis bayesiano y así poder hacer inferencias del parámetro aún cuando no se conozca exactamente la distribución.

2. Accidentes aéreos fatales

En la tabla 1, aparece el número de accidentes fatales y muertes en accidentes aéreos regulares durante un año a lo largo de un periodo de 10 años.

Supóngase que el número de accidentes fatales cada año es independiente al de otros años, con una distribución Poisson con parámetro θ .

Sea X_i número de accidentes fatales que se producen cada año. Entonces

$$X_i \sim f(x_i | \theta)$$

Año	Accidentes fatales	Pasajeros muertos
1988	25	699
1989	27	817
1990	22	440
1991	25	510
1992	29	1097
1993	34	936
1994	28	941
1995	26	710
1996	23	1135
1997	27	930

TABLA 1. ACCIDENTES AÉREOS FATALES DE LOS PAÍSES MIEMBROS DE LA OACI.

Utilizando una distribución a priori no informativa por la regla de Jeffreys, la matriz de información esperada de Fisher es

$$I(\theta)_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \text{Log } f(x_i | \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right],$$

de donde se tiene que la no informativa es

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{|I(\theta)|}$$

Se tiene que

$$f(x_i | \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!},$$

luego tomando logaritmo se obtiene que

$$\text{Log}(f(x_i | \theta)) = -\theta + x_i \log \theta - \log x_i!$$

y calculando la parcial con respecto de θ se obtiene

$$\frac{\partial (\text{Log } f(x_i | \theta))}{\partial \theta} = -1 + \frac{x_i}{\theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 (\text{Log } f(x_i | \theta))}{\partial \theta^2} = -\frac{x_i}{\theta^2}$$

Así la matriz de información de Fisher será

$$I(\theta) = -E \left[-\frac{x_i}{\theta^2} \right] = \frac{E(x_i)}{\theta^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta} = \theta^{-1}$$

Entonces

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{\theta^{-1}} = \theta^{-1/2}$$

y por lo tanto

$$\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2}$$

La cual claramente se ve que no es propia, sin embargo haciendo el cálculo de la distribución a posteriori se ve que

$$\pi(\theta | \vec{x}) \propto e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2}}$$

la cual es el kernel de una distribución Gamma, por lo que

$$\pi(\theta | \vec{x}) = \text{Ga} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}, n \right).$$

En la figura 1, se muestra la gráfica de la distribución a posteriori, en la tabla 2 se muestran los momentos e intervalo creíble de la distribución a posteriori.

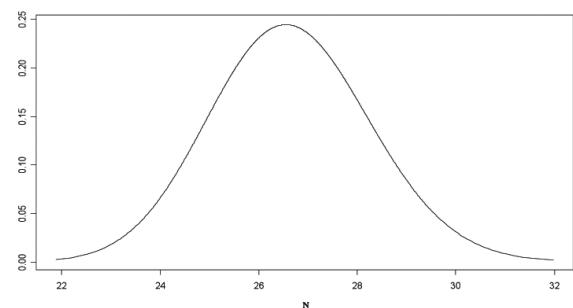


FIG.1 DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI USANDO LA DISTRIBUCIÓN A PRIORI NO INFORMATIVA DE JEFFREYS.

	Distribución a priori no informativa
Esperanza	26.650
Varianza	2.665
Intervalo creíble	(23.5461; 29.94324)

TABLA 2. MOMENTOS E INTERVALO CRÉIBLE DE LA DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI.

2.1 Predictiva a posteriori.

Para hallar la distribución predictiva a posteriori se procede como sigue

$$m(x^* | \vec{x}) = \int f(x^* | \theta) \pi(\theta | \vec{x}) d\theta$$

$$m(x^* | \vec{x}) = \frac{n^{(n\bar{x} + \frac{1}{2})} \Gamma(n\bar{x} + \frac{1}{2})}{x^*! \Gamma(n\bar{x} + \frac{1}{2}) (1+n)^{(x^* + n\bar{x} + \frac{1}{2})}}$$

por lo tanto se tiene que la distribución predictiva a posteriori es una distribución Poisson- Gamma

$$m(x^* | \vec{x}) = Pg(x^* | (n\bar{x} + \frac{1}{2}), n, 1)$$

En la figura 2, se muestra la distribución predictiva a posteriori.

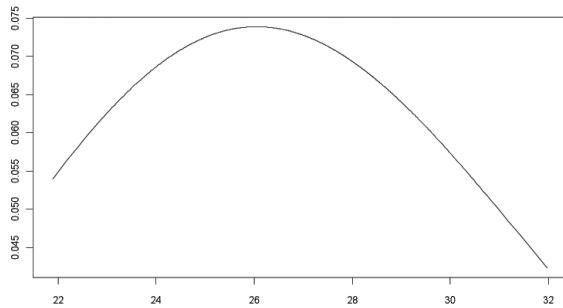


FIG. 2 DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA A POSTERIORI USANDO DISTRIBUCIÓN A PRIORI NO INFORMATIVA DE JEFFREYS.

Ahora, tomando en cuenta la distribución predictiva a posteriori se puede predecir el número de accidentes de 1998 tomando el valor esperado de ésta. En la tabla 3, se muestran los momentos e intervalo creíble de la distribución predictiva a posteriori.

$$E^{m(x|\vec{x})}(x) = n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = 1 \frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n}$$

$$E^{m(x|\vec{x})}(x) = \frac{266.50}{10} = 26.65 \approx 27$$

$$E^{m(x|\vec{x})}(x) = n \frac{\alpha(\beta+n)}{\beta^2} = 1 \frac{(n\bar{x} + \frac{1}{2})(n+1)}{n^2}$$

$$Var^{m(x|\vec{x})}(x) = \frac{(266.50)(11)}{10^2} = 29.315$$

de donde se tiene que:

	Distribución a priori no informativa
Esperanza	26.650
Varianza	29.315
Intervalo creíble	(17,38)

TABLA 3. MOMENTOS E INTERVALO CREÍBLE DE LA DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA A POSTERIORI.

A continuación se obtiene la aproximación de Laplace para la distribución a posteriori $\pi(\theta|x)$, y basándose en esta aproximación se construirá un intervalo creíble al 95% y se comparará con el obtenido anteriormente.

2.2 Aproximación de Laplace

En este caso se tiene lo siguiente

$$\pi(\theta | x) \propto f(x | \theta) \pi(\theta),$$

y

$$L(\theta) = \log(\pi(\theta|x)).$$

Por lo tanto

$$L(\theta) = (n\bar{x} + \frac{1}{2}) \log n + (n\bar{x} - \frac{1}{2}) \log \theta - n\theta - \log \Gamma(n\bar{x} + \frac{1}{2}),$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{(n\bar{x} - \frac{1}{2})}{\theta} - n = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n},$$

$$C^{-1} = - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2},$$

y resulta que

$$C = \frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n^2},$$

Por lo tanto, la aproximación de Laplace es

$$\pi_{aprox}^{norm}(\theta) = N\left(\frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n}, \frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n^2}\right).$$

Un intervalo creíble para θ , con esta aproximación es

$$\frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Utilizando la aproximación t-Student se obtiene como intervalo creíble

$$\frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En la figura 3, se muestra la gráfica de la distribución a posteriori junto con la aproximación de Laplace.

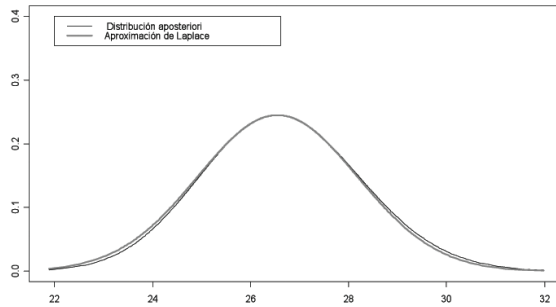


FIG. 3. DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI Y APROXIMACIÓN DE LAPLACE A LA DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI.

Distribución a posteriori	Normal	T-Student
(23.5461,29.9432)	(23.3563,29.7437)	(21.3652,31.7348)

TABLA 4. COMPARACIÓN DE INTERVALOS CREÍBLES CON LA APROXIMACIÓN DE LAPLACE.

Ahora se analizará que tan buena es la aproximación de Laplace a la media y a la varianza a posteriori.

Para calcular los momentos de la distribución a posteriori, se necesita evaluar expresiones del tipo

$$E[g(\theta)] = \frac{\int g(\theta) \exp[-nh(\theta)] d\theta}{\int \exp[-nh(\theta)] d\theta}.$$

Donde

$$\exp[-nh(\theta)] = l(\theta; x) \pi(\theta)$$

la aproximación de Laplace vendrá dada por

$$E[g(\theta)] = g(\theta^*) [1 + O(\frac{1}{n})].$$

Una aproximación mas precisa viene dada por

$$E[g(\theta)] = \frac{\sigma^* \exp[-nh^*(\theta^*)]}{\sigma \exp[-nh^*(\hat{\theta})]} [1 + O(\frac{1}{n^2})]$$

con

$$-nh^*(\theta) = -nh(\theta) + \log[g(\theta)],$$

y θ^* la moda de $h(\theta)$.

Para el cálculo de la media a posteriori, se sabe que

$$\pi(\theta | x) = Ga(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}, n)$$

por lo tanto

$$E(\theta | x) = \frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n}.$$

Al calcular la aproximación de Laplace a la media a posteriori

$$-nh(\theta) = \log l(\theta; x) + \log \pi(\theta),$$

$$-nh(\theta) = -n\theta + (\sum_{i=1}^n x_i) \log \theta - \frac{1}{2} \log \theta,$$

derivando con respecto a θ e igualando a cero, se obtiene lo siguiente

$$\hat{\theta} = \frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n}$$

y

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo que la aproximación de momentos de primer orden es

$$\frac{n\bar{x} - \frac{1}{2}}{n}$$

de donde el error relativo con respecto a la media a posteriori exacta es

$$1 - \frac{n}{n\bar{x} - \frac{1}{2}}.$$

Para calcular la aproximación de segundo orden (con error $O(1/(n^2))$) se tiene que

$$-nh^*(\theta) = -n\theta + (\sum_{i=1}^n x_i) \log \theta - \frac{1}{2} \log \theta + \log \theta$$

calculando la parcial con respecto a θ se obtiene que

$$\frac{\partial [-nh^*(\theta)]}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}}{\theta}$$

igualando a cero se obtiene que

$$\theta^* = \frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n} \quad y \quad \sigma^* = \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo que la aproximación de segundo resulta

$$E(\theta | x) \approx \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n} \right) \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-1},$$

de donde el error relativo con respecto a la media a posteriori exacta es

$$\left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-1}.$$

Para el cálculo de la varianza de la distribución a posteriori se tiene que

$$V[(\theta | x)] = \frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n}.$$

Para obtener la aproximación de Laplace a la varianza a posteriori, después de hacer unos cálculos se tiene que

$$E[(\theta^2 | x)] \approx \sqrt{\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}}} \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n} \right)^2 \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{(n\bar{x} - \frac{1}{2})} e^{-2},$$

$$E[(\theta^2 | x)] \approx \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n} \right)^2 \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{n\bar{x}} e^{-2},$$

por lo que la aproximación de segundo orden para la varianza viene dada por

$$Var[(\theta | x)] = E[\theta^2 | x] - E^2[(\theta | x)]$$

$$Var[(\theta | x)] \approx \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n} \right)^2 \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{\left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2} \right)} e^{-2} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2}} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-1}$$

$$\approx \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n} \right)^2 \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-2} - \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n} \right) \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{n\bar{x}} e^{-2}$$

$$\approx \frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n^2} \left[\left(\frac{1}{n\bar{x} + \frac{1}{2}} \right) \left(n\bar{x} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{n\bar{x}} e^{-2} - \left(n\bar{x} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{2n\bar{x}} e^{-2} \right]$$

de donde el error relativo de segundo orden a la varianza a posteriori exacta es

$$\left[\left(\frac{1}{n\bar{x} + \frac{1}{2}} \right) \left(n\bar{x} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{n\bar{x} + \frac{3}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{n\bar{x}} e^{-2} - \left(n\bar{x} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{n\bar{x} + \frac{1}{2}}{n\bar{x} - \frac{1}{2}} \right)^{2n\bar{x}} e^{-2} \right]$$

Distribución a posteriori (media)	Distribución a posteriori (varianza)	Aproximación media [O(1/n)]	Aproximación media [O(1/n²)]	Aproximación varianza [O(1/n²)]
26.650	2.665	26.55	26.6501	2.6650

TABLA 5. COMPARACIÓN DE MEDIAS Y VARIANZAS CON LA APROXIMACIÓN DE LAPLACE.

2.3 Muestreo importante

Ahora se calculará el valor esperado a posteriori mediante el muestreo importante y se comparará el resultado con el verdadero valor esperado.

Para aplicar el muestreo importante basta conseguir una distribución pivote de la que sea fácil simular

$$\pi^*(\theta) \approx c[l(\theta; x)]\pi(\theta)$$

y utilizando

$$\theta_j \approx \pi^*(\theta)$$

se puede aproximar

$$E(\theta | x) \approx \frac{\sum_{i=1}^M \theta_i w(\theta_i)}{\sum_{i=1}^M w(\theta_i)},$$

donde

$$w(\theta) = \frac{l(\theta; x)\pi(\theta)}{\pi^*(\theta)}.$$

Nota: Se debe tomar una distribución pivote que verifique que

$$\text{sop}[\pi(\theta | x)] \subset \text{sop}(\pi^*) .$$

Distribución a posteriori	Muestreo importante (Utilizando como pivote la aproximación de Laplace)
26.650	24.1439

TABLA 6. ESTIMACIÓN DEL VALOR ESPERADO MEDIANTE EL MUESTREO IMPORTANTE.

2.4 Método de aceptación-rechazo

En primer lugar se debe simular de $\pi(\theta|x)$, para ello se verificará si existe una constante $c^* > 0$ y una densidad $\pi^*(\theta)$, llamada función envoltura, tal que

$$l(\theta; x)\pi(\theta) \leq c^*\pi^*(\theta),$$

de esta forma es posible encontrar una muestra aleatoria de $\pi(\theta|x)$ a partir de simulaciones de $\pi^*(\theta)$, aplicando el algoritmo del método de aceptación-rechazo

	Distribución a posteriori	Aceptación-rechazo
Esperanza	26.650	26.6450
Varianza	2.665	2.5697

TABLA 7. COMPARACIÓN DE MEDIAS Y VARIANZAS CON EL MÉTODO DE ACEPTACIÓN-RECHAZO.

En la figura 4, se muestra la gráfica de aproximación de la distribución a posteriori por el método de aceptación-rechazo.

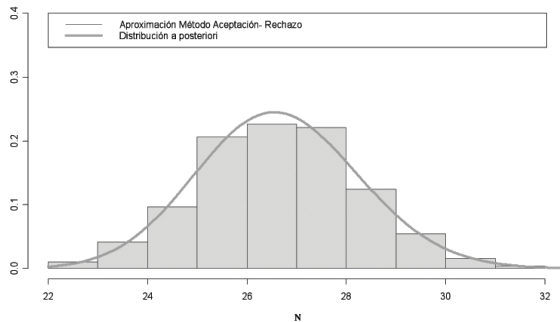


FIG. 4. GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI Y LA APROXIMACIÓN POR EL MÉTODO DE ACEPTACIÓN-RECHAZO.

2.5 Método de Metropolis-Hastings

El algoritmo de Metropolis-Hastings es un método Monte Carlo vía cadenas de Markov que ha sido ampliamente usado en la física matemática y restauración de imágenes por muchos años, pero recientemente descubierto por los estadísticos. El método en su forma más simple lo publica Metropolis (1953).

Dada la distribución a posteriori de un parámetro θ es $\pi(\theta|x)$, se escoge una función auxiliar $q(\theta_i|\theta_j)$, tal que $q(\cdot|\theta)$ es una función de densidad de probabilidad para toda θ_j , además es simétrica, es decir:

$$q(\theta^*|\theta) = q(\theta|\theta^*)$$

La función q es llamada distribución de densidad propuesta o candidato-generadora. Entonces, el algoritmo de Metropolis genera una cadena de Markov, $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, donde la probabilidad de transición de θ_t a θ_{t+1} depende sólo de θ_t y no de $\theta_0, \dots, \theta_{t-1}$, y cuya distribución de transición es

$$P(\theta_{t+1}|\theta_t) = \alpha(\theta_{t+1}, \theta_t)q(\theta_{t+1}|\theta_t)$$

La cadena se aproxima a una distribución estacionaria y las muestras del vector $(\theta_{k+1}, \dots, \theta_{k+n})$ son muestras de la densidad objetivo $\pi(\theta|x)$.

Nótese que la densidad a posteriori conjunta π es necesaria sólo en una constante de proporcionalidad, dado que en aplicaciones bayesianas

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$$

lo cual es una forma que está típicamente disponible.

Hastings (1970) generaliza el algoritmo de Metropolis usando una función arbitraria de probabilidad de transición (candidato-generadora) y aceptando la probabilidad de un punto candidato como

$$\alpha(\theta^*, \theta_t) = \min\left(\frac{\pi(\theta^*|x)q(\theta_t|\theta^*)}{\pi(\theta_t|x)q(\theta^*|\theta_t)}, 1\right)$$

este es el algoritmo de Metropolis-Hastings. Si la distribución propuesta es simétrica, se recupera el algoritmo de Metropolis original.

Utilizando el método de simulación de metrópolis Hastings se calcula el $E(\theta|x)$ y $V(\theta|x)$. Posteriormente se graficará la aproximación mediante este método a la distribución a posteriori $\pi(\theta|x)$.

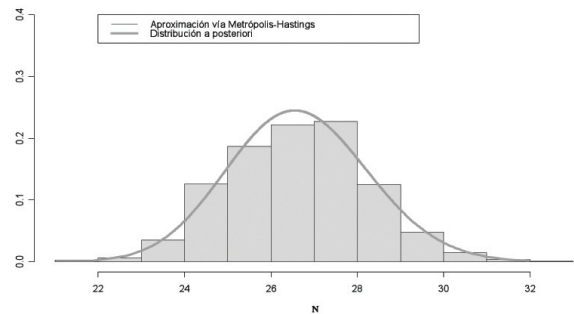


FIG. 5. GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI Y LA APROXIMACIÓN VÍA METROPOLIS-HASTINGS.

	Distribución a posteriori	Metrópolis-Hastings
Esperanza	26.650	26.6324
Varianza	2.655	2.6931

TABLA 8.- COMPARACIÓN DE MEDIAS Y VARIANZAS CON EL MÉTODO DE METROPOLIS-HASTINGS

3. Accidentes mortales

Se asume que el número de accidentes mortales que se producen cada año sigue una distribución de Poisson independiente (al de otros años), con una razón constante y una exposición cada año proporcional al número de pasajeros por milla que vuelan. (Se estima el número de pasajeros que vuelan por milla dividiendo las cantidades apropiadas e ignorando los errores de redondeo), también se realiza el análisis utilizando como distribución a priori la distribución a priori no informativa de Jeffreys.

Año	Pasajeros por milla
1988	13,980
1989	16,340
1990	14,666
1991	17,000
1992	18,283
1993	18,720
1994	18,820
1995	23,666
1996	7,433
1997	7,107

TABLA 9. PASAJEROS POR MILLA VIENE DADO EN 100 MILLONES.

Se obtendrá la distribución a posteriori, la media, varianza y un intervalo creíble. También se representará la distribución predictiva y se calcularán los momentos e intervalo creíble para el número de accidentes mortales en 1998 bajo la hipótesis de que 25.857×10^{11} fue realmente el número de pasajeros que volaron ese año.

Sea X_i el número de accidentes mortales que se producen cada año, entonces $X_i \sim \text{Po}(\lambda z_i)$ donde z_i es el número de pasajeros por milla que vuelan cada año. Tenemos que la verosimilitud es:

$$f(x_i | \lambda) = \frac{e^{-(z_i \lambda)} (z_i \lambda)^{x_i}}{x_i!}$$

se calcula la distribución a priori no informativa por la regla de Jeffreys, por lo que resulta

$$\pi(\lambda) \propto \sqrt{|I(\lambda)|}$$

donde

$$I(\lambda)_{ij} = -E \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right)$$

se tiene que

$$\pi(x_i | \lambda) = \frac{e^{-(z_i \lambda)} (z_i \lambda)^{x_i}}{x_i!}$$

tomando logaritmo se obtiene que

$$\log \pi(x_i | \lambda) = x_i \log z_i + x_i \log \lambda - x_i \lambda - \log(x_i!)$$

y calculando la derivada parcial con respecto a λ resulta que

$$\frac{\partial (\log \pi(x_i | \lambda))}{\partial \lambda} = -x_i + \frac{x_i}{\lambda} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 (\log \pi(x_i | \lambda))}{\partial \lambda^2} = -\frac{x_i}{\lambda^2}.$$

Así la matriz de información esperada de Fisher será

$$I(\lambda) = -E \left[\frac{-x_i}{\lambda^2} \right] = \frac{E(x_i)}{\lambda^2} = \frac{z_i \lambda}{\lambda^2} = \frac{z_i}{\lambda} = z_i \lambda^{-1},$$

entonces

$$\pi(\lambda) \propto \sqrt{z_i \lambda^{-1}} = (z_i \lambda^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

por lo tanto

$$\pi(\lambda) \propto z_i^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

La cual claramente se ve que no es una distribución propia, sin embargo haciendo el cálculo de la distribución a posteriori, obviamente como $z_i^{1/2}$ es constante con respecto a λ , vemos que

$$\pi(\lambda | x) \propto e^{-\lambda \sum z_i} \lambda^{\sum (x_i) - \frac{1}{2}}$$

lo cual es el kernel de una distribución Gamma

$$\pi(\lambda | x) = \text{Ga} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}, \sum_{i=1}^n z_i \right).$$

En la figura 6, se muestra la gráfica de la distribución de la distribución a posteriori.

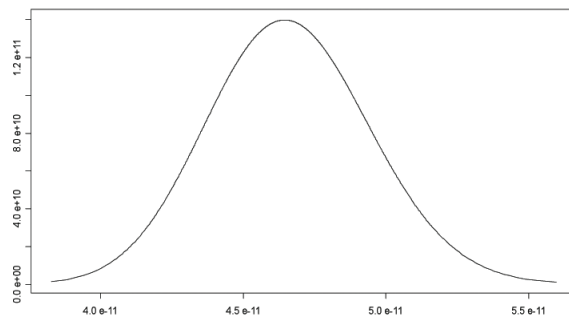


FIG. 6. GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI PARA EL NÚMERO DE PASAJEROS POR MILLA.

Esperanza	1.421902e ⁻¹¹
Varianza	7.586512e ⁻²⁵
Intervalo creíble	1.509223e ⁻¹¹ , 9.19254e ⁻¹¹)

TABLA 10. MOMENTOS E INTERVALOS CRÉIBLES PARA LA DISTRIBUCIÓN A POSTERIORI.

Para hallar la predictiva a posteriori se procede como sigue

$$m(x^*|x) = \int f(x^*|\lambda) \pi(\lambda|x) d\lambda = \frac{(z_p)^{x^*} \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^{(n\bar{x} + \frac{1}{\gamma} + x^*)}}{x^* \Gamma(n\bar{x} + \frac{1}{\gamma}) \left(\sum_{i=1}^n z_i + z_p \right)^{(n\bar{x} + \frac{1}{\gamma} + x^*)}}$$

La figura 7, muestra La gráfica de la predictiva a posteriori.

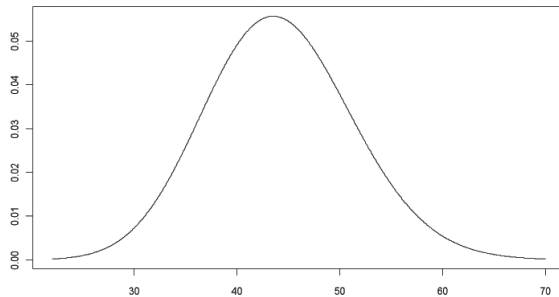


FIG. 7. GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN PREDICATIVA A POSTERIORI PARA EL NÚMERO DE PASAJEROS POR MILLA.

Esperanza	44.1681
Varianza	51.4883
Intervalo creíble	(31,59)

TABLA 11. MOMENTOS E INTERVALO CREÍBLE DE LA DISTRIBUCIÓN PREDICATIVA A POSTERIORI.

4. Conclusiones

Los modelos estudiados en este artículo son adecuados en vista de que la variación entre cada uno de ellos es mínima respecto a la inferencia realizada. Por ejemplo para el modelo del apartado 2 se observa que la media de la distribución a posteriori es 26.650; sin embargo al considerar el modelo del apartado 3 esta varía considerablemente, lo cuál es lógico pues en este modelo de Poisson tomamos la tasa proporcional al número de pasajeros por milla que vuelan, mientras que en el modelo del apartado 2 no se tiene en cuenta este dato.

Mientras que en relación a la distribución predictiva, basados en la lógica, el modelo del apartado 3 es más razonable, sin embargo, sabiendo que en 1998 en realidad ocurrieron 22 accidentes mortales debemos de destacar que el modelo del apartado 2 es el que obtiene un valor más próximo a lo ocurrido, pues por este modelo se obtuvo una media en torno a 26.650 y

un intervalo creíble próximo a (17,38); mientras que en el estudio del modelo del apartado 3 se obtuvo una media de 44.1681 y un intervalo creíble de (31,59).

Por otro lado, el intervalo del 95% para el modelo del apartado 3 es mas grande que para el modelo del apartado 2, porque en el modelo del apartado 2 se tiene una tasa de accidente esperada constante por año, mientras que en el modelo del apartado 3 se tiene una tasa de accidente esperada que es proporcional al número de pasajeros que vuelan por año.

También podemos destacar del apartado 2, la buena aproximación a los momentos de la distribución a posteriori obtenidos por el método de aproximación de Laplace. **T**

Referencias

- BERGER, JAMES O.
1985 Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Segunda edición, Springer-Verlag.
- BERNARDO, JOSÉ M. Y SMITH, ADRIAN F. M.
1994 Bayesian Theory. John Wiley & Sons Ltd.
- CARLIN, B. P. AND LOUIS, T. A.
2000 Bayes and Empirical Methods for Data Analysis, Second edition. Chapman & Hall/CRC.
- GELMAN, ANDREW., CARLIN, JOHN B., STERN, HAL S., RUBIN, DONALD B.
1995 Bayesian Data Analysis. Chapman and Hall.
- HASTINGS W. K.
1970 Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. Biometrika 57, 97-109.
- ROBERT, C. P., Y G. CASELLA
1999 Monte Carlo Statistical Methods. Springer Verlag.
- SECRETARÍA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES, INSTITUTO MEXICANO DEL TRANSPORTE.
2000 Elementos para el análisis de la seguridad en el transporte aéreo comercial en México. Publicación Técnica No. 152. Sanfandila, Qro.